

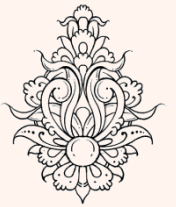
یادگیری ماشین
بخش سوم



دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده‌ی فضای مجازی
پاییز ۱۴۰۱
احمد محمودی ازناوه

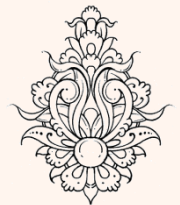
فهرست مطالب

- یادگیری بیزی
 - معیارهای تصمیم‌گیری
- تخمین پارامتر
 - تابع درست‌نمایی
 - MAP
 - Bayes estimator
- دسته‌بندی
- رگرسیون چند جمله‌ای تک متغیره
- Regularization



احتمال و استنتاج

- داده‌هایی که مورد استفاده قرار می‌دهیم، حاصل فرآیندی است که کاملاً شناخته شده نیست.
- در پدیده‌های تصادفی، متغیرهای غیرقابل مشاهده، موجب پیدایش عدم قطعیت می‌شود.
- $x=f(z)$
- با توجه به این که چنین فرآیندهایی بدین شیوه قابل مدل کردن نیستند، فروجی را به صورت یک متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم:
- $P(X=x)$
- بر اساس نمونه‌های ورودی می‌توان این توزیع را تخمین زد، به عنوان مثال برای سکه



$$p_o = \# \{Heads\} / \# \{Tosses\} = \sum_t x^t / N$$

• مسأله‌ی دسته بندی اعتبار مشتریان:

– ورودی: درآمد و پس انداز

– خروجی: مشتری low risk و high risk

– Input: $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, Output: $C \in \{0, 1\}$

– پیش بینی:

– high risk ($C=1$) or low risk ($C=0$)

choose $\begin{cases} C = 1 \text{ if } P(C = 1 | x_1, x_2) > 0.5 \\ C = 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

or

choose $\begin{cases} C = 1 \text{ if } P(C = 1 | x_1, x_2) > P(C = 0 | x_1, x_2) \\ C = 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

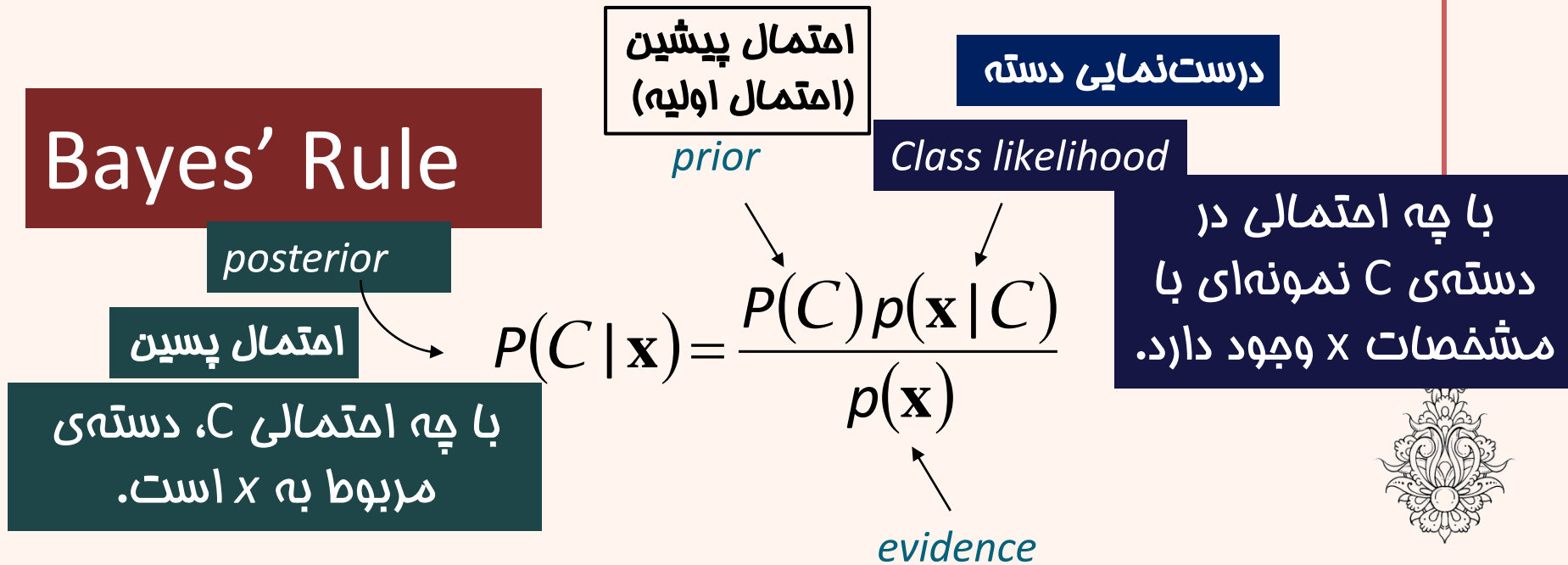
احتمال شرطی



Bayesian inference is a method of [statistical inference](#) in which [Bayes' theorem](#) is used to update the [probability](#) for a hypothesis as more [evidence](#) or [information](#) becomes available[wiki].

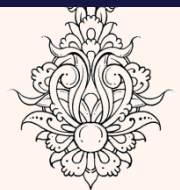
دسته‌بندی (ادامه...)

- با فرض این ورودی x ، متغیر مشاهده شده است، مسأله یافتن احتمال $P(C|x)$ است.



$$P(C = 0) + P(C = 1) = 1$$

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|C = 1)P(C = 1) + p(\mathbf{x}|C = 0)P(C = 0)$$

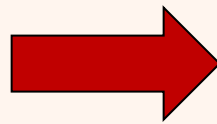


دسته بندی (ادامه...)

$$P(C_1|x) > \frac{1}{2} < P(C_2|x)$$

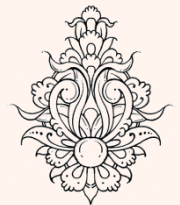
$$\frac{P(C_1|x)}{P(C_2|x)} > \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{\frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x)}}{\frac{P(x|C_2)P(C_2)}{P(x)}} \gg 1$$

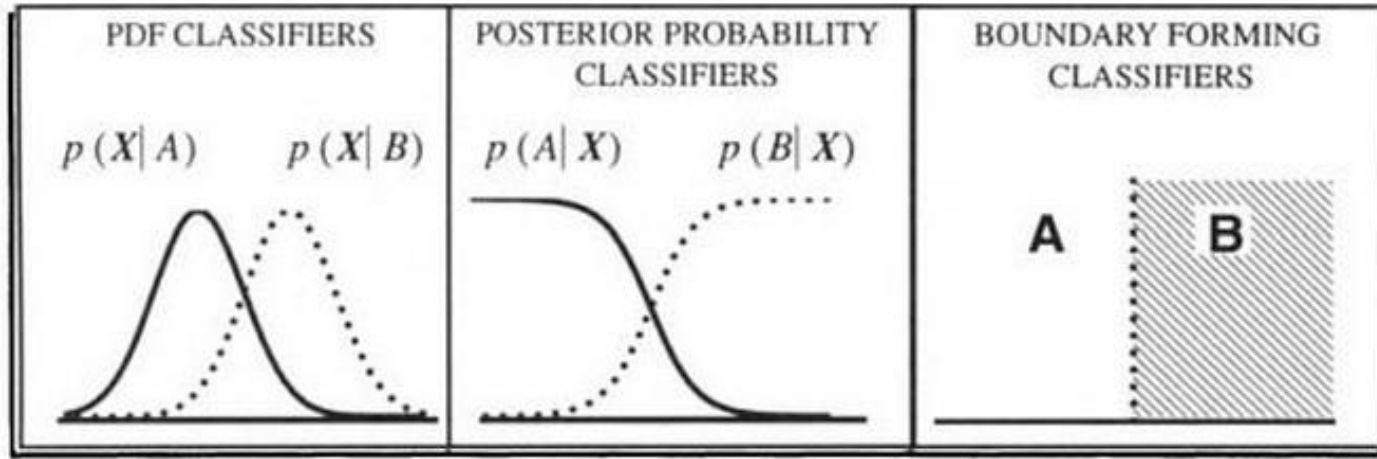


$$\frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_2)P(C_2)} \gg 1$$

$$\frac{P(x|C_1)}{P(x|C_2)} \gg \frac{P(C_2)}{P(C_1)}$$

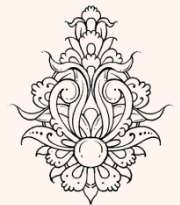


دسته‌بندی (ادامه...)



pattern recognition using neural networks theory and algorithms for engineers and scientists, by Carl G. Looney

$$P(C | \mathbf{x}) = \frac{P(C) p(\mathbf{x} | C)}{p(\mathbf{x})}$$



دسته‌بندی چندکلاسی

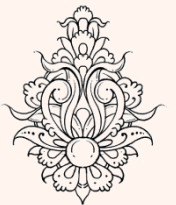
امتمال رخداد x هنگامی که می‌دانیم به دسته‌ی C_i تعلق دارد
Class likelihood

$$P(C_i | \mathbf{x}) = \frac{P(C_i) p(\mathbf{x} | C_i)}{p(\mathbf{x})}$$

$$P(C_i | \mathbf{x}) = \frac{P(C_i) p(\mathbf{x} | C_i)}{p(\mathbf{x})} = \frac{P(C_i) p(\mathbf{x} | C_i)}{\sum_{k=1}^K P(C_k) p(\mathbf{x} | C_k)}$$

$$P(C_i | \mathbf{x}) = \max_k P(C_{\hat{k}} | \mathbf{x})$$

در این صورت دسته‌ی C_i انتخاب می‌شود.

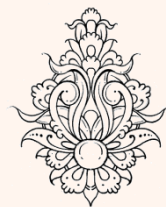


Losses and Risks

- در برخی موارد، تصمیم‌ها پی‌آمد یکسانی ندارند.
– «کنش α_i » به عنوان انتخاب دسته C_i تعریف شده است.
- λ_{ik} به عنوان میزان ریسک انتخاب دسته i در زمانی که ورودی به این دسته k تعلق دارد.
- در این صورت، **expected risk** به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R(\alpha_i | \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \lambda_{ik} P(C_k | \mathbf{x})$$

choose α_i if $R(\alpha_i | \mathbf{x}) = \min_k R(\alpha_k | \mathbf{x})$

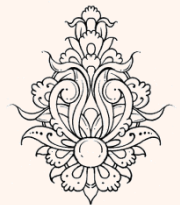


بررسی 0/1 Loss

$$\lambda_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = k \\ 1 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(\alpha_i | \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^K \lambda_{ik} P(C_k | \mathbf{x}) \\ &= \sum_{k \neq i} P(C_k | \mathbf{x}) \\ &= 1 - P(C_i | \mathbf{x}) \end{aligned}$$

برای داشتن کم‌ترین ریسک **محتمل‌ترین** حالت
را انتخاب می‌کنیم



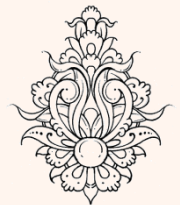
هزینه‌ی بالای انتخاب اشتباه

- در برخی کاربردها، انتخاب اشتباه دسته هزینه‌ی بالایی دارد، به نحوی که بهتر است هیچ انتخابی توسط سیستم خودکار صورت نپذیرد. در این حالت نمونه به عنوان «مشکوک» تلقی شده و «رد» می‌شود.

– «کنش» جدیدی تعریف می‌شود: رد (reject) : α_{k+1}

choose C_i if $R(\alpha_i|\mathbf{x}) < R(\alpha_k|\mathbf{x}) \quad \forall k \neq i$ and
 $R(\alpha_i|\mathbf{x}) < R(\alpha_{k+1}|\mathbf{x})$

reject $R(\alpha_{k+1}|\mathbf{x}) < R(\alpha_i|\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, k$



هزینه‌ی بالای انتخاب اشتباه (ادامه...)

- به عنوان مثال تابع ریسک به صورت زیر تعریف می‌شود:

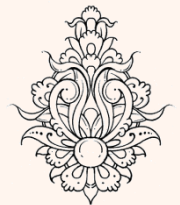
$$\lambda_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = k \\ \lambda & \text{if } i = K + 1, \quad 0 < \lambda < 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$R(\alpha_{K+1} | \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \lambda P(C_k | \mathbf{x}) = \lambda$$

$$R(\alpha_i | \mathbf{x}) = \sum_{k \neq i} P(C_k | \mathbf{x}) = 1 - P(C_i | \mathbf{x})$$

choose C_i if $P(C_i | \mathbf{x}) > P(C_k | \mathbf{x}) \quad \forall k \neq i$ and $P(C_i | \mathbf{x}) > 1 - \lambda$

reject otherwise



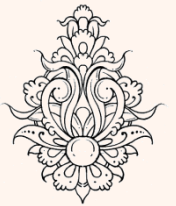
- احتمال این که با در اختیار داشتن ورودی x ، در حالت S_k باشیم: $P(S_k | x)$
- سودمندی کنش α_i وقتی در حالت k ام هستیم:

$$- U_{ik}$$

$$EU(\alpha_i | \mathbf{x}) = \sum_k U_{ik} P(S_k | \mathbf{x})$$

Choose α_i if $EU(\alpha_i | \mathbf{x}) = \max_j EU(\alpha_j | \mathbf{x})$

Expected utility



Discriminant Functions

choose C_i if $g_i(\mathbf{x}) = \max_k g_k(\mathbf{x})$

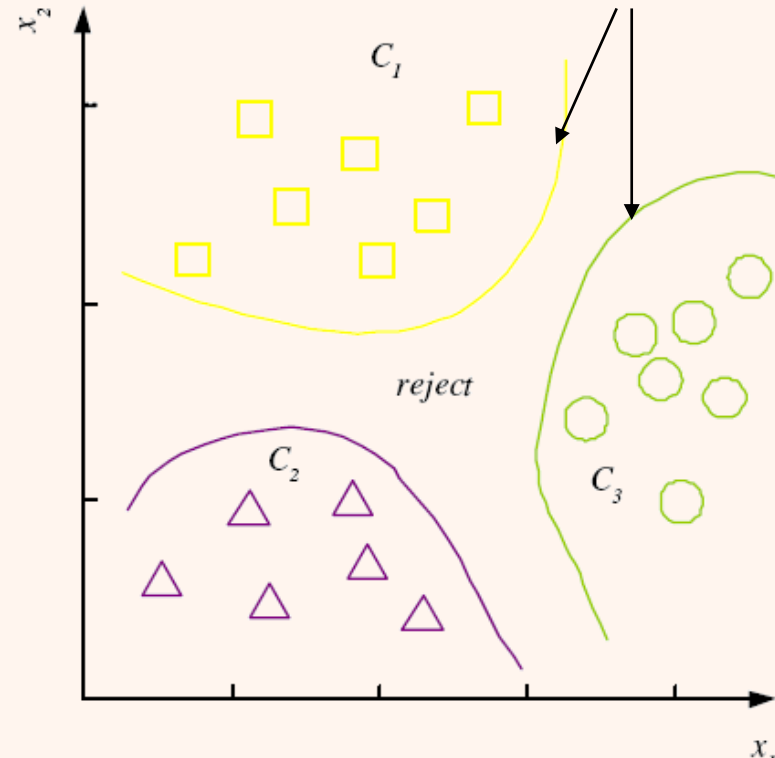
$$g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -R(\alpha_i | \mathbf{x}) \\ P(C_i | \mathbf{x}) \\ p(\mathbf{x} | C_i)P(C_i) \end{cases}$$

K decision regions $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_K$

$$\mathcal{R}_i = \{\mathbf{x} | g_i(\mathbf{x}) = \max_k g_k(\mathbf{x})\}$$

توابع جداساز

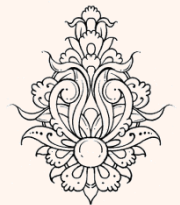
$$g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, K$$



Dichotomizer

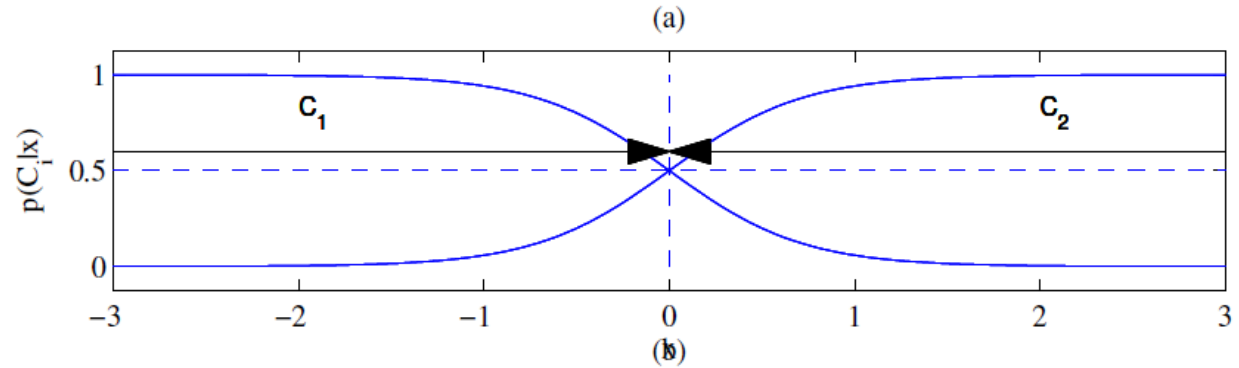
$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

choose $\begin{cases} C_1 & \text{if } g(\mathbf{x}) > 0 \\ C_2 & \text{otherwise} \end{cases}$

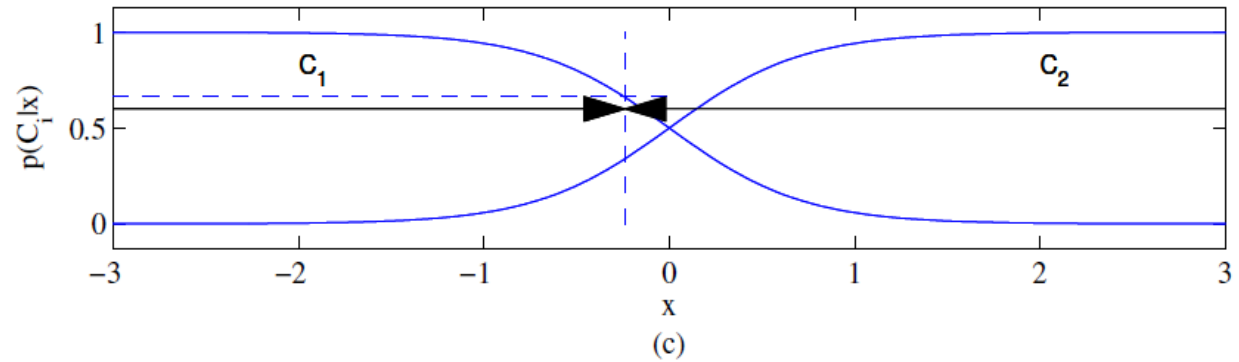


بررسی حالات مختلف

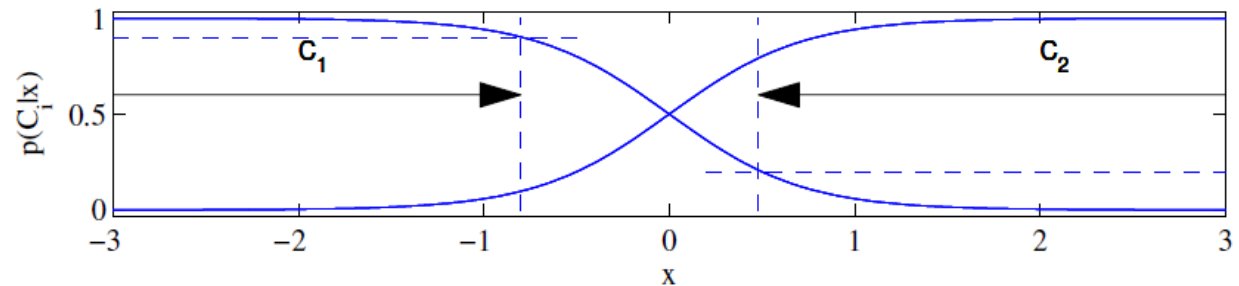
Equal losses



Unequal losses



With reject



- در فصل پیش در مورد «اتخاذ تصمیم بهینه» با در نظر گرفتن احتمال مشاهدهی ورودی با فرض دانستن دسته و احتمال وقوع دسته بحث شد.

– با توجه به این فرض که توزیع داده‌ها، از توزیعی خاص پیروی می‌کند، این روش‌ها را «روش‌های پارامتری» می‌نامند.

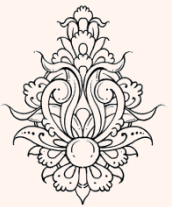
- $\mathcal{X} = \{x^t\}_{t=1}^N$ where $x^t \sim p(x)$

- تخمین پارامتر:

– تخمین پارامترهای θ از روی داده‌های آموزشی \mathcal{X}

– برای داده‌ها یک مدل به صورت $p(x | \theta)$ در نظر گرفته می‌شود (θ «آماره‌ی بسنده» است؛ تمام اطلاعات در مورد توزیع را در بر دارد)

Sufficient statistic



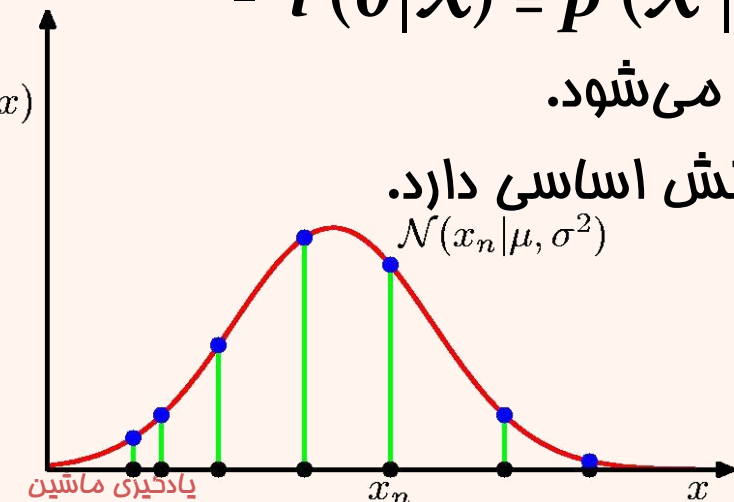
• «تابع درست‌نمایی»، تابعی از پارامترهای مدل آماری است.

– درست‌نمایی یک مجموعه از پارامترها، θ ، برای مقادیری معین (\mathcal{X}) ؛ برابرست با احتمال رخداد \mathcal{X} به ازای مجموعه پارامترها (احتمال درستی θ آن به شرط \mathcal{X})

$$\bullet l(\theta|\mathcal{X}) \equiv p(\mathcal{X}|\theta)$$

• \mathcal{X} ثابت است و θ را تغییر داده می‌شود.

• این تابع در «استنباط آماری» نقش اساسی دارد.



Bishop

Statistical inference

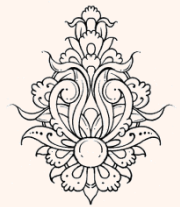
دانشگاه
تهران
پیشین

Make sampling x^t from $p(x^t|\theta)$ as likely as possible

- در صورتی که نمونه‌ها، $\mathcal{X} = \{x^t\}$ ، «متغیرهای مستقل با توزیع یکسان (i.i.d.)» باشد:

independent and identically distributed

- $l(\theta|\mathcal{X}) = p(\mathcal{X}|\theta) = \prod_t p(x^t|\theta)$
- در برآورد درست‌نمایی بیشینه در پی یافتن θ هستیم به گونه‌ای که احتمال تعلق \mathcal{X} به p حداکثر شود؛ درست‌نمایی بیشینه شود.
- برای سادگی محاسبات، به جای درست‌نمایی، از لگاریتم آن استفاده می‌شود:



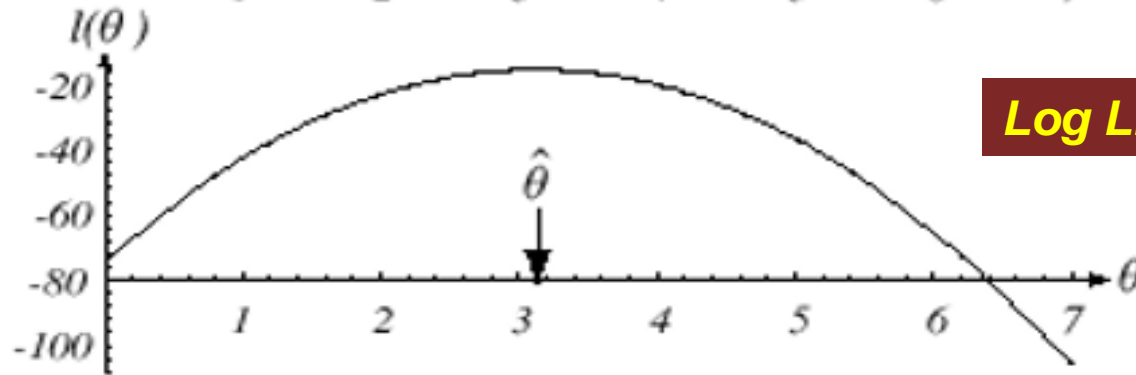
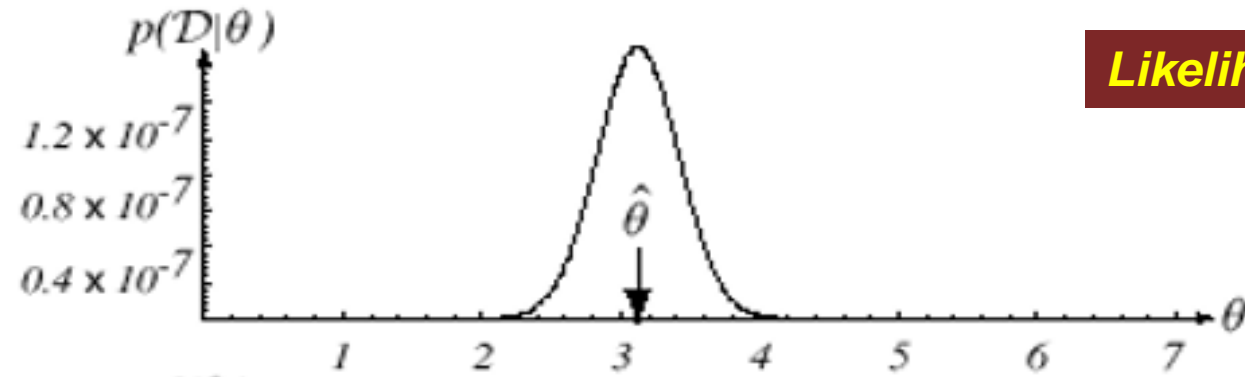
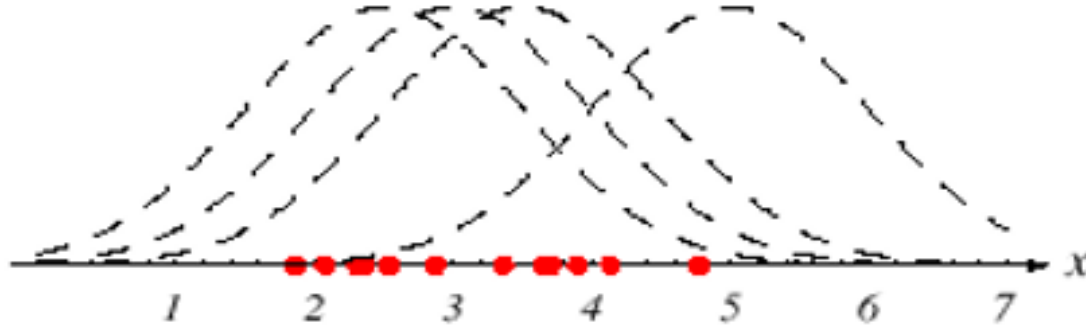
$$\mathcal{L}(\theta|\mathcal{X}) = \log l(\theta|\mathcal{X}) = \sum_t \log p(x^t|\theta)$$

Log likelihood

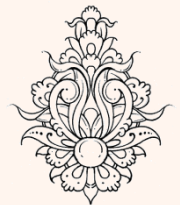
$$\theta^* = \operatorname{argmax}_{\theta} \mathcal{L}(\theta|\mathcal{X})$$



برآورد درست‌نمایی بیشینه



Pattern Classification, Chapter 3



Bernoulli /categorical (generalized Bernoulli) Density

x in $\{0,1\}$

• توزیع برنولی

$$P(x) = p_o^x (1 - p_o)^{(1-x)}$$

$$\mathcal{L}(p_o | \mathcal{X}) = \log \prod_t p_o^{x^t} (1 - p_o)^{(1-x^t)}$$

$$\text{MLE: } \hat{p}_o = \sum_t x^t / N$$

• توزیع برنولی تعدیم یافته

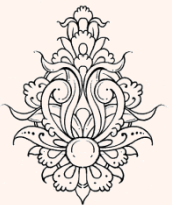
- $K > 2$ states, x_i in $\{0,1\}$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_K) = \prod_i p_i^{x_i}$$

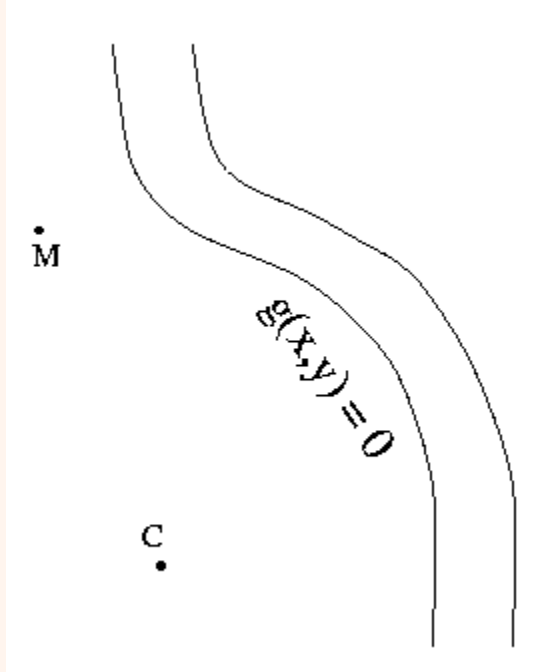
$$\mathcal{L}(p_1, p_2, \dots, p_K | \mathcal{X}) = \log \prod_t \prod_i p_i^{x_i^t} = \log \prod_i p_i^{\sum_t (x_i^t)}$$

$$\text{MLE: } \hat{p}_i = \sum_t x_i^t / N$$

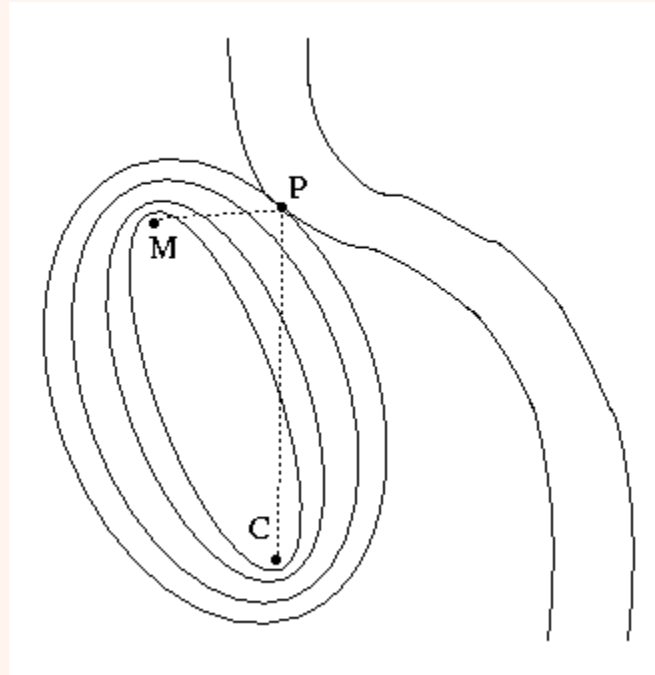
$$x_i^t = \begin{cases} 1 & \text{if exprimnet } t \text{ choose state } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Lagrange Multipliers

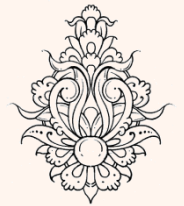


$f(\mathbf{P}) = d(\mathbf{M}, \mathbf{P}) + d(\mathbf{P}, \mathbf{C})$, subject to the constraint that $g(\mathbf{P}) = 0$



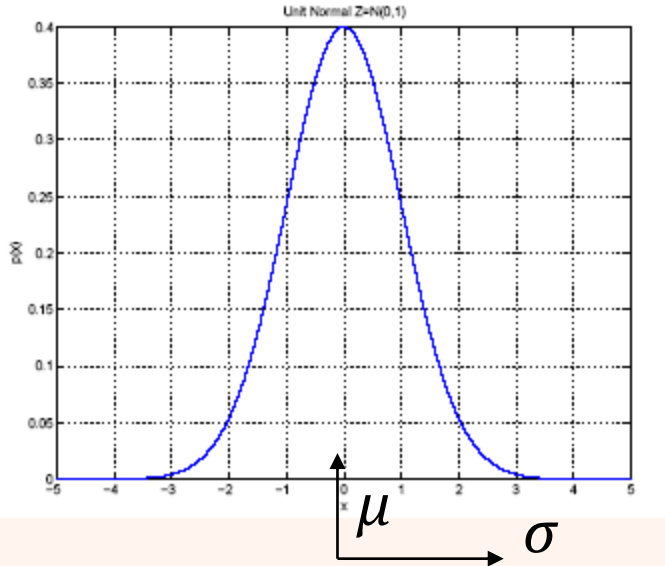
$$\nabla f(\mathbf{P}) = \lambda \nabla g(\mathbf{P}).$$

$$F(\mathbf{P}, \lambda) = f(\mathbf{P}) - \lambda g(\mathbf{P})$$



Gaussian (Normal) Distribution

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$



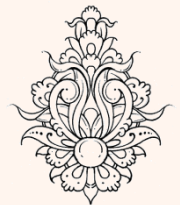
- $p(x) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- MLE for μ and σ^2 :

$$L(\mu, \sigma | X) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - N \log \sigma - \frac{\sum_t (x^t - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

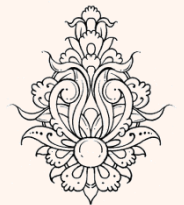
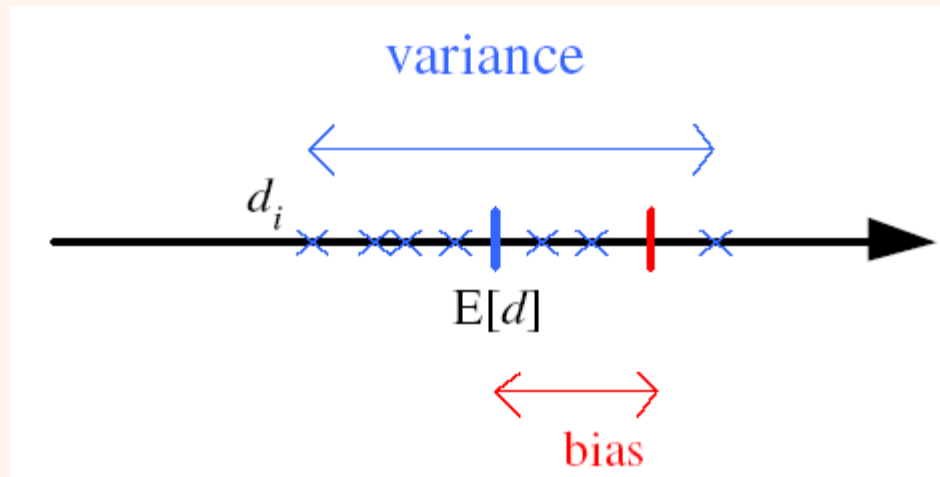
$$m = \frac{\sum_t x^t}{N} \quad s^2 = \frac{\sum_t (x^t - m)^2}{N}$$



ارزیابی برآورد

Mean square error:

$$\begin{aligned} r(d, \theta) &= E[(d - \theta)^2] \\ &= (E[d] - \theta)^2 + E[(d - E[d])^2] \\ &= \text{Bias}^2 + \text{Variance} \quad (4.11) \end{aligned}$$



مثال - تخمین میانگین

- در صورتی که x^t نمونه‌های از یک توزیع با میانگین μ باشد،

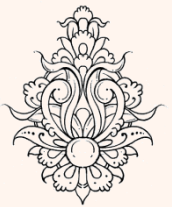
$$E[m] = E\left[\frac{\sum_t x^t}{N}\right] = \frac{1}{N} \sum_t E[x^t] = \frac{N\mu}{N} = \mu$$

- میانگین نمونه‌ها **unbiased** است.
- در صورتی که واریانس تخمین، با افزایش تعداد نمونه‌ها به صفر میل کند، به برآورد انجام شده «سازگار» گفته می‌شود.

Consistent estimator

$$\text{Var}(m) \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

$$\text{var}(m) = \text{var}\left(\frac{\sum_t x^t}{N}\right) = \frac{1}{N^2} \sum_t \text{var}(x^t) = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}$$



مثال - تخمین واریانس

$$s^2 = \frac{\sum (x^t - m)^2}{N} = \frac{\sum (x^t)^2 - Nm^2}{N}$$

$$E[s^2] = \frac{\sum E[(x^t)^2] - N \cdot E[m^2]}{N}$$

یادآوری

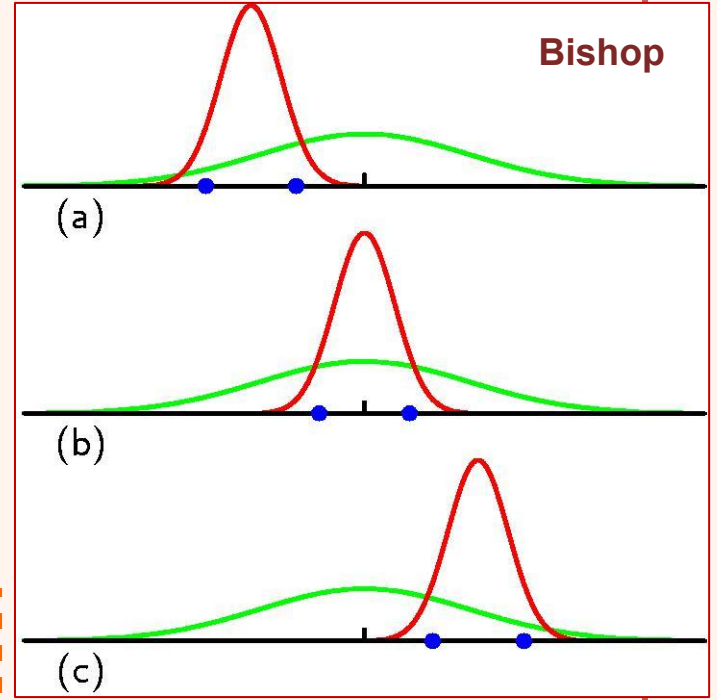
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[(x^t)^2] = \sigma^2 + \mu^2 \quad E[m^2] = \frac{\sigma^2}{N} + \mu^2$$

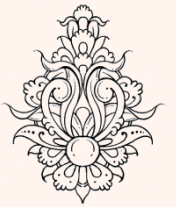
$$E[s^2] = \frac{N(\sigma^2 + \mu^2) - N(\sigma^2/N + \mu^2)}{N} = \frac{N-1}{N} \sigma^2 \neq \sigma^2$$

asymptotically unbiased estimator

$$b_{\theta}(s) \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$



Bishop



برآورد بیشینه‌گر احتمال پسین

Maximum a Posteriori (MAP)

• در MLE، پارامتر مورد نظر به عنوان مجهول در نظر گرفته می‌شود، ممکن است در مورد پارامتر مورد نظر از پیش اطلاعاتی (prior information) داشته باشیم. این اطلاعات می‌توانند به تخمین دقیق‌تر کمک کنند، به ویژه زمانی که داده‌های آموزش کم‌تعداد باشند.

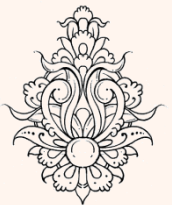
- در این حالت به θ به صورت یک متغیر تصادفی نگاه می‌کنیم.

- به عنوان مثال می‌دانیم، θ با احتمال نوددرصد، با توزیع گاوسی بین ۵ و ۹ به (صورت متقارن) قرار دارد.

$$P\left\{-1.64 < \frac{\theta - \mu}{\sigma} < 1.64\right\} = 0.9$$

$$P\{\mu - 1.64\sigma < \theta < \mu + 1.64\sigma\} = 0.9$$

$$P(\theta) \sim N\left(7, (2/1.64)^2\right)$$



برآورد بیشینه‌گر احتمال پسین

- در چنین حالتی اطلاعاتی در مورد $p(\theta)$ وجود دارد. با ترکیب این اطلاعات با آنچه داده‌ها به ما می‌گویند (likelihood density)، خواهیم داشت:

$$p(\theta|\mathcal{X}) = p(\mathcal{X}|\theta) p(\theta) / p(\mathcal{X})$$

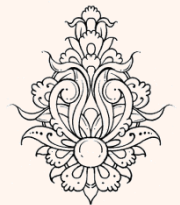
Maximum a Posteriori (MAP)

$$\theta_{\text{MAP}} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(\theta|\mathcal{X}) = \operatorname{argmax}_{\theta} p(\theta) p(\mathcal{X}|\theta)$$

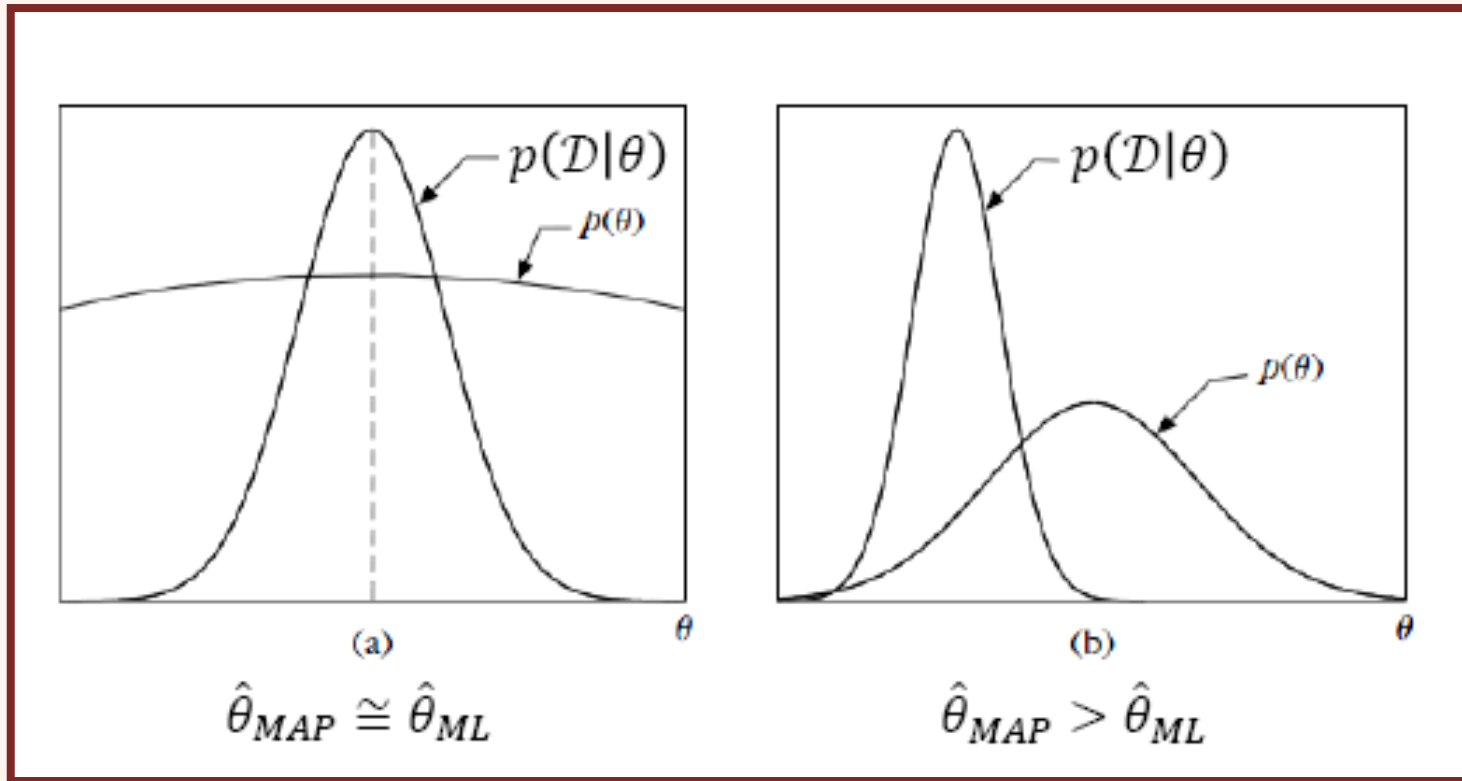
تفاوت با ML در نظر گرفتن $p(\theta)$ است.

$$\theta_{\text{ML}} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(\mathcal{X}|\theta)$$

Maximum Likelihood (ML)

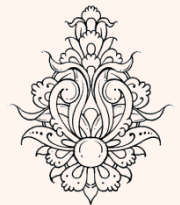


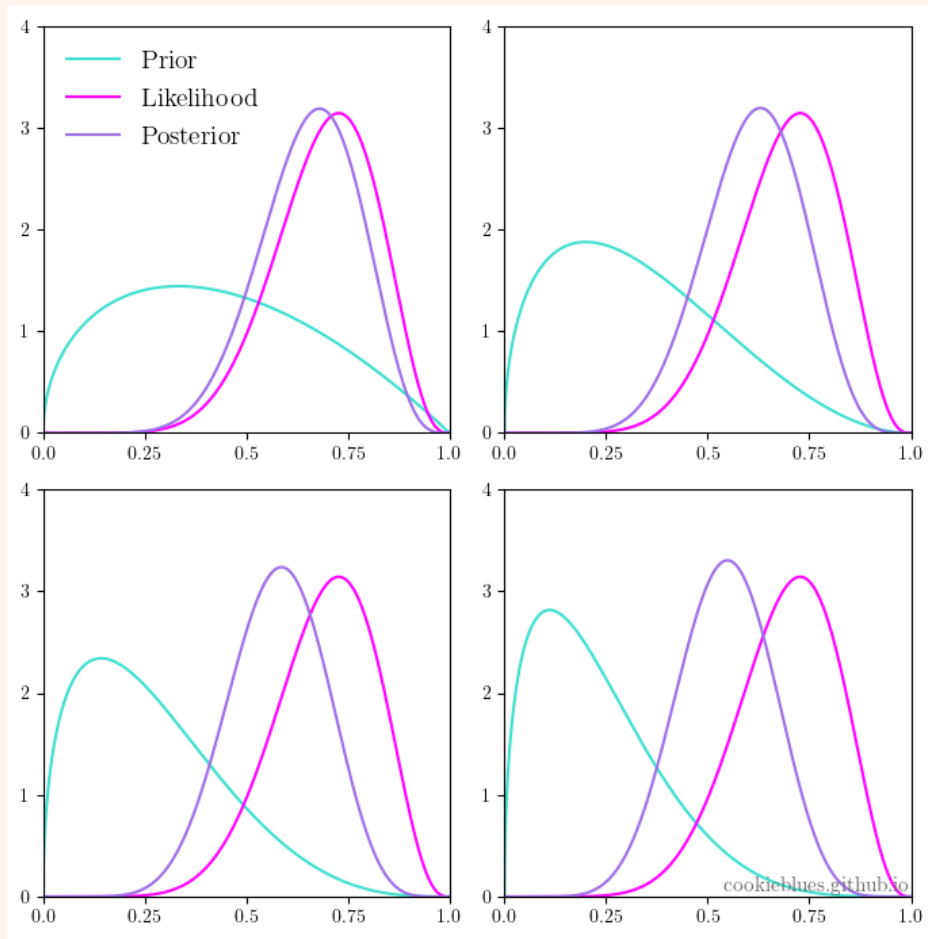
برآورد بیشینه‌گر احتمال پسین (ادامه...)



Pattern recognition, Sergios Theodoridis

در صورتی که $p(\theta)$ دارای توزیع یکنواخت باشد، دو روش پاسخ یکسانی به دست می‌آورند.





مثال

$$x \sim p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

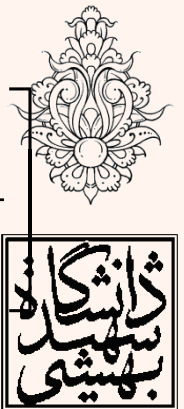
$$p(\mu | X) \propto p(\mu)p(X | \mu)$$

$$\prod_t p(\mu | x^t) = p(\mu) \prod_t p(x^t | \mu)$$

برای تخمین MAP باید رابطه‌ی زیر مناسبه بشود:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln\left[p(\mu) \prod_t p(x^t | \mu)\right] = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\ln p(\mu) + \sum_t \ln p(x^t | \mu)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma_0 - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \frac{\sum_t (x^t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$



مثال - ادامه

$$\mu_N = \frac{N\sigma_0^2 \bar{x} + \sigma^2 \mu_0}{N\sigma_0^2 + \sigma^2}$$

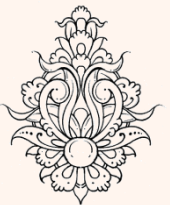
$$\mu_N = \frac{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \sum_t x^t}{1 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} N}$$

$$\mu_N \rightarrow \frac{1}{N} \sum_t x^t \text{ as } N \rightarrow \infty$$

$$\mu_N \rightarrow \frac{1}{N} \sum_t x^t \text{ as } \sigma_0 \gg \sigma$$

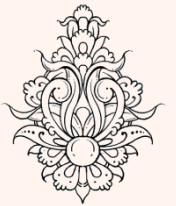
برای واریانس هم به صورت مشابه خواهیم داشت:

$$\sigma_N^2 = \frac{\sigma^2 \sigma_0^2}{N\sigma_0^2 + \sigma^2}$$



- بهترین تقریب از یک متغیر تصادفی میانگین آن است.

$$\theta_{Bayes} = E[\theta|\mathcal{X}] = \int \theta p(\theta|\mathcal{X}) d\theta$$



- رویکرد دیگر محاسبه‌ی $P(x|X)$ به صورت مستقیم است:

$$\begin{aligned} p(x|X) &= \int p(x, \theta|X) d\theta \\ &= \int p(x|\theta, X) p(\theta|X) d\theta \\ &= \int p(x|\theta) p(\theta|X) d\theta \end{aligned}$$

اگر پارامتر θ را بدانیم، کل توزیع مشخص است

میانگین وزن دار تخمین را بر اساس احتمال مقادیر مدل

- عیب عمده‌ی این روش حجم محاسبات بالاست، و محاسبات تحلیلی تنها در حالات خاصی امکان پذیر است.



برای سادگی می‌توان فرض کرد که $P(\theta|X)$ شبیه تابع ضربه است، در این صورت

$$P(x|X) = P(x|\theta_{MAP})$$

دسته بندی پارامتری

$$g_i(x) = p(x | C_i)P(C_i)$$

or

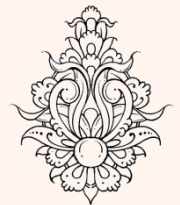
$$g_i(x) = \log p(x | C_i) + \log P(C_i)$$

تابع جدا ساز

در صورتی که چگالی دسته را گاوسی در نظر بگیریم:

$$p(x | C_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

$$g_i(x) = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log \sigma_i - \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} + \log P(C_i)$$



دسته‌بندی پارامتری (ادامه...)

$$\mathcal{X} = \{x^t, r^t\}_{t=1}^N$$

نمونه‌های آموزشی

$$x \in \mathcal{R}$$

$$r_i^t = \begin{cases} 1 & \text{if } x^t \in C_i \\ 0 & \text{if } x^t \in C_j, j \neq i \end{cases}$$

برآورد درست‌نمایی پیشینه

$$\hat{P}(C_i) = \frac{\sum_t r_i^t}{N} \quad m_i = \frac{\sum_t x^t r_i^t}{\sum_t r_i^t} \quad s_i^2 = \frac{\sum_t (x^t - m_i)^2 r_i^t}{\sum_t r_i^t}$$

توابع جداساز

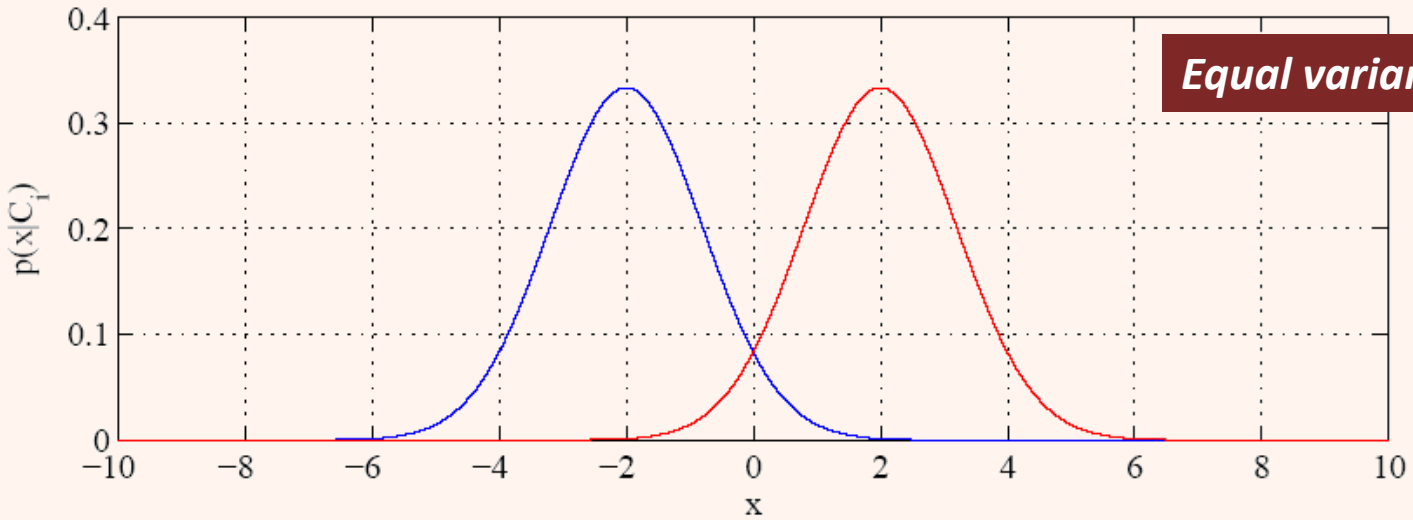
$$g_i(x) = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log s_i - \frac{(x - m_i)^2}{2s_i^2} + \log \hat{P}(C_i)$$



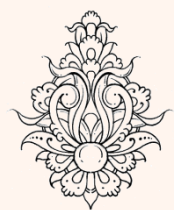
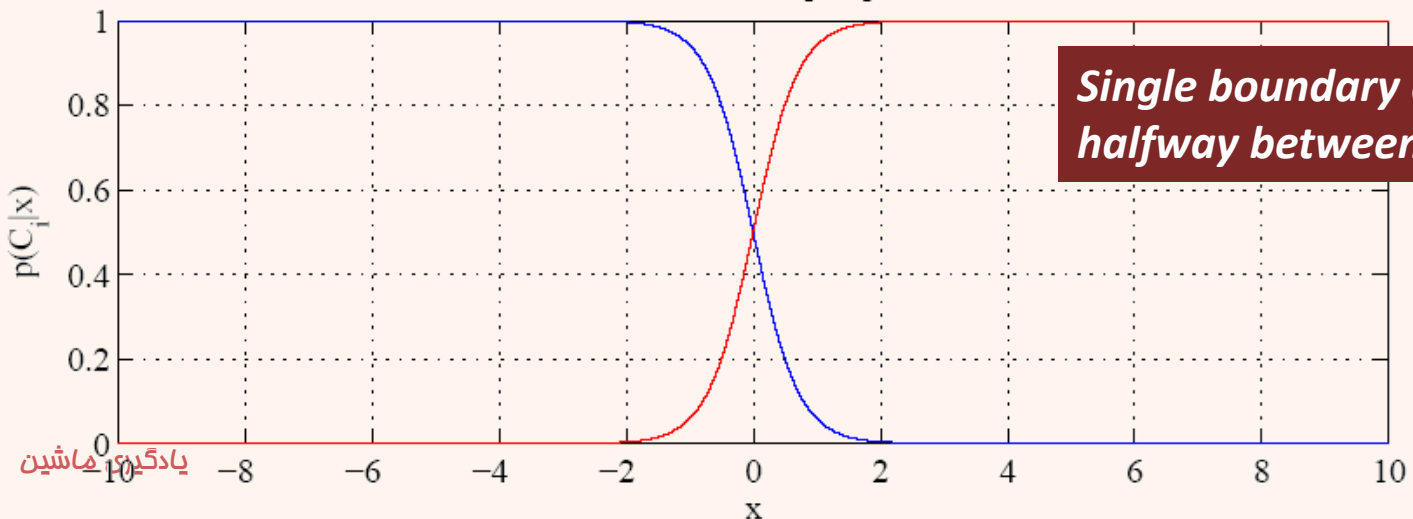
دسته‌بندی دو دسته با واریانس یکسان و احتمال اولیه مساوی

$$g_i(x) = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log s_i - \frac{(x - m_i)^2}{2s_i^2} + \log \hat{P}(C_i)$$

Likelihoods



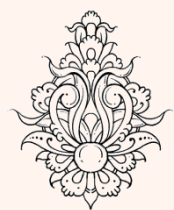
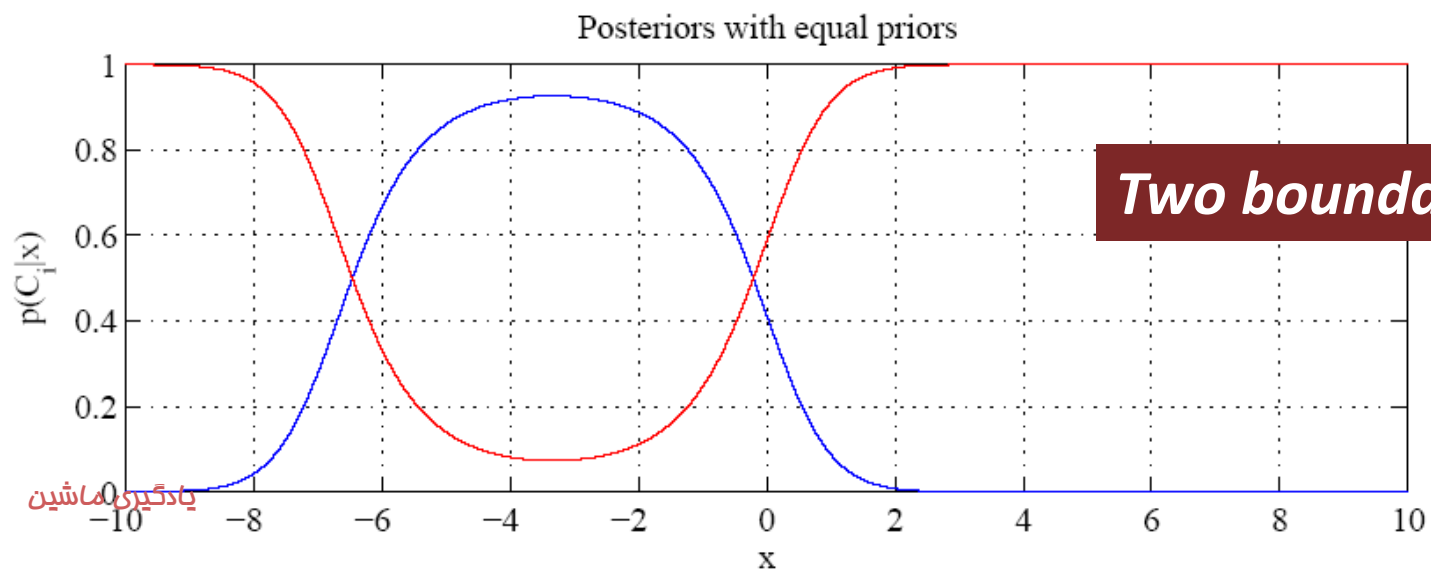
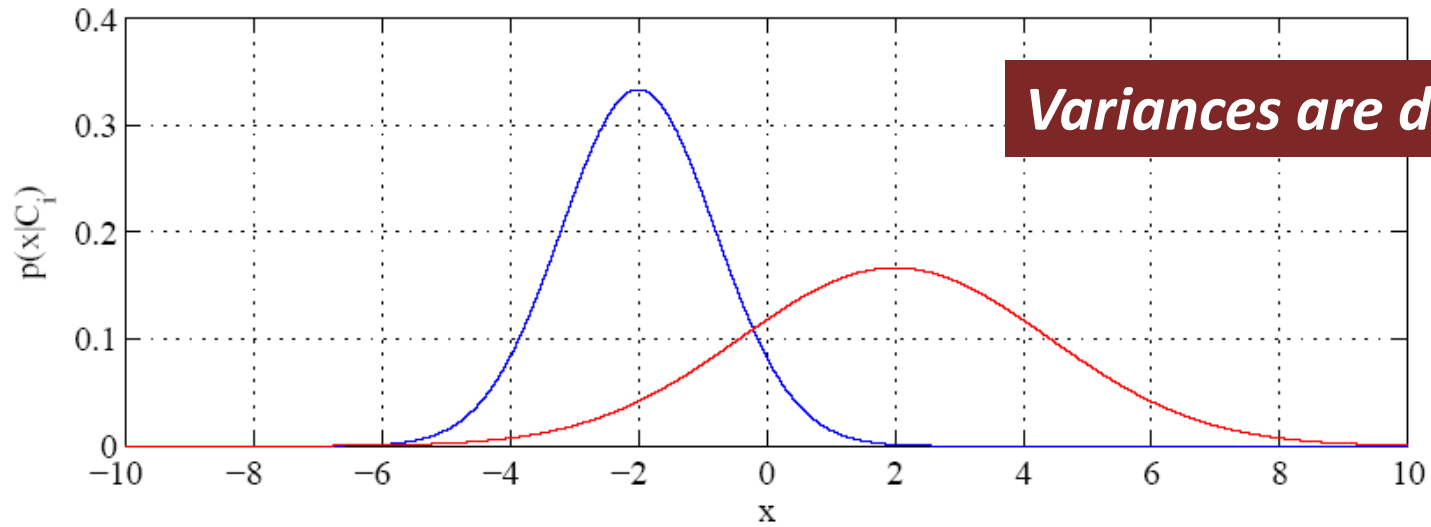
Posteriors with equal priors



دسته‌بندی دو دسته با واریانس متفاوت و احتمال اولیه مساوی

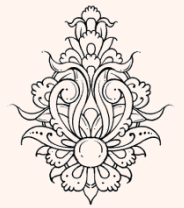
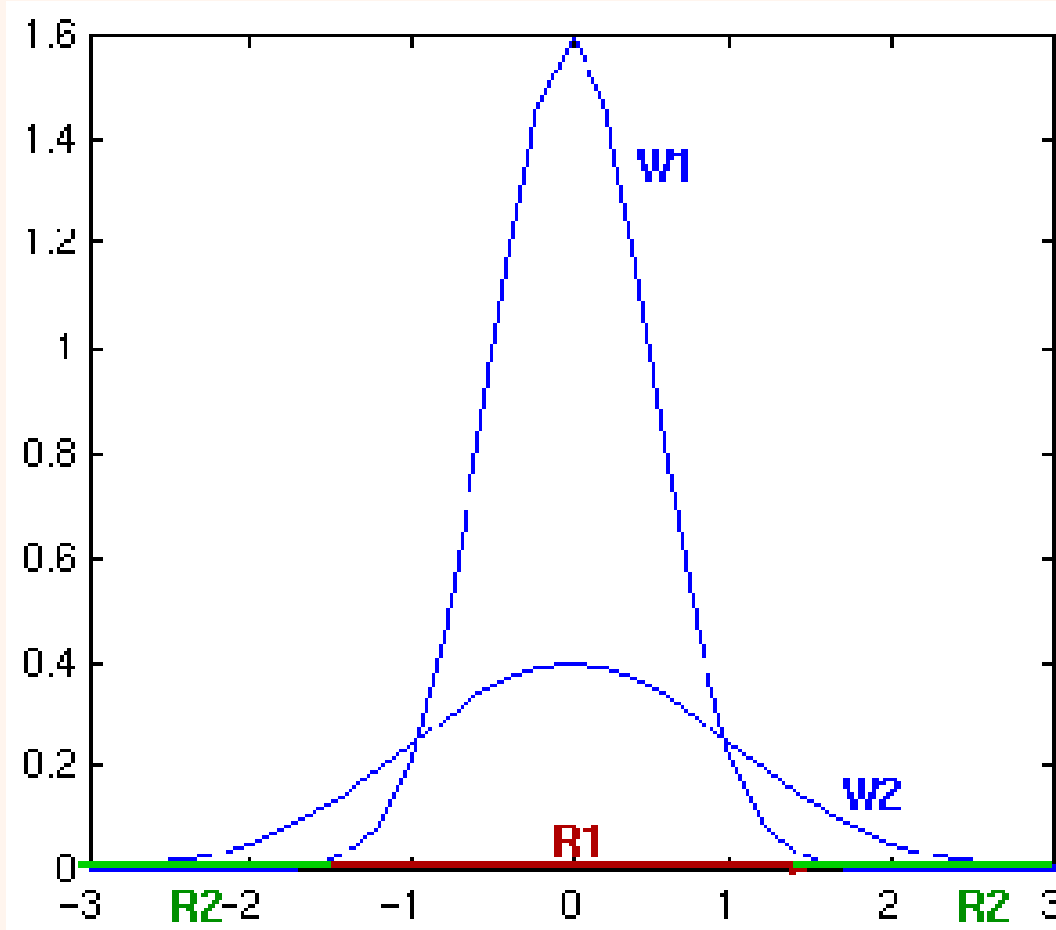
$$g_i(x) = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log s_i - \frac{(x - m_i)^2}{2s_i^2} + \log \hat{P}(C_i)$$

Likelihoods



مثال

$$g_i(x) = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log s_i - \frac{(x - m_i)^2}{2s_i^2} + \log \hat{P}(C_i)$$



Dependent variable

رگرسیون

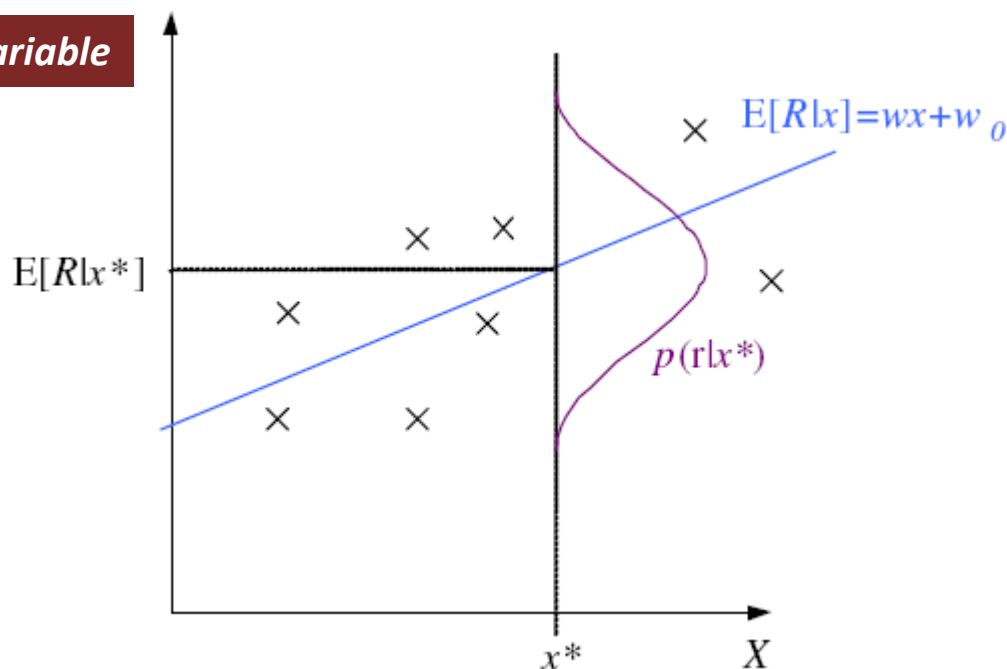
Independent variable

$$r = f(x) + \varepsilon$$

$$\text{estimator: } g(x | \theta)$$

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$p(r | x) \sim \mathcal{N}(g(x | \theta), \sigma^2)$$



$$\mathcal{L}(\theta | \mathcal{X}) = \log \prod_{t=1}^N p(x^t, r^t)$$

$$p(x, r) = p(r | x)p(x)$$

$$= \log \prod_{t=1}^N p(r^t | x^t) + \log \prod_{t=1}^N p(x^t)$$



باتوجه به این که به تخمین ربطی ندارد، این بخش در نظر گرفته نمی‌شود

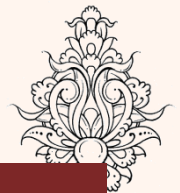
محاسبه‌ی تابع خطا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta | \mathcal{X}) &= \log \prod_{t=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{[r^t - g(x^t | \theta)]^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= -N \log \sqrt{2\pi\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N [r^t - g(x^t | \theta)]^2\end{aligned}$$

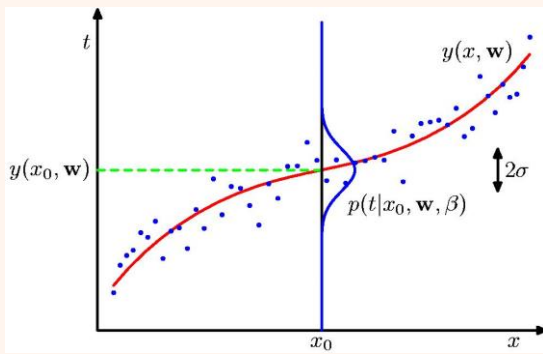
باتوجه به این که به تخمین ربطی ندارد، این بخش در نظر گرفته نمی‌شود

$$E(\theta | \mathcal{X}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N [r^t - g(x^t | \theta)]^2$$

Least Squares estimates



رگرسیون چندجمله‌ای

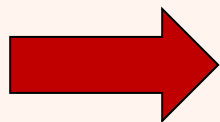
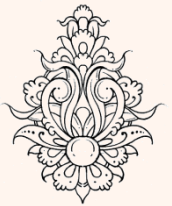


$$E(\theta | \mathcal{X}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N [r^t - g(x^t | \theta)]^2$$

Least Squares estimates

$$g(x^t | w_k, \dots, w_2, w_1, w_0) = w_k (x^t)^k + \dots + w_2 (x^t)^2 + w_1 x^t + w_0$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \sum_{t=1}^N [r^t - g(x^t | \theta)] \times -\frac{\partial g}{\partial w_i} \quad \forall i \quad 0 \leq i \leq k$$



$$\sum_{t=1}^N g(x^t | \theta) (x^t)^i = \sum_{t=1}^N r^t (x^t)^i$$



رگرسیون چندجمله‌ای

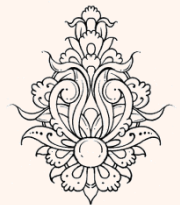
$$g(x^t | w_k, \dots, w_2, w_1, w_0) = w_k (x^t)^k + \dots + w_2 (x^t)^2 + w_1 x^t + w_0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} N & \sum_t x^t & \sum_t (x^t)^2 & \dots & \sum_t (x^t)^k \\ \sum_t x^t & & & \dots & \sum_t (x^t)^{k+1} \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ \sum_t (x^t)^k & \sum_t (x^t)^{k+1} & \sum_t (x^t)^{k+2} & \dots & \sum_t (x^t)^{2k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_t r^t \\ \sum_t r^t x^t \\ \sum_t r^t (x^t)^2 \\ \vdots \\ \sum_t r^t (x^t)^k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

$$\sum_{t=1}^N g(x^t | \theta) (x^t)^i = \sum_{t=1}^N r^t (x^t)^i$$



رگرسیون چندجمله‌ای

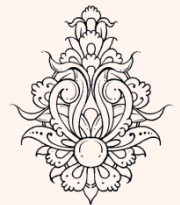
$$\mathbf{A} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D}) \quad \mathbf{y} = \mathbf{D}^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & (x^1)^2 & \dots & (x^1)^k \\ 1 & x^2 & (x^2)^2 & \dots & (x^2)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x^N & (x^N)^2 & \dots & (x^N)^k \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_t r^t \\ \sum_t r^t x^t \\ \sum_t r^t (x^t)^2 \\ \vdots \\ \sum_t r^t (x^t)^k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} N & \sum_t x^t & \sum_t (x^t)^2 & \dots & \sum_t (x^t)^k \\ \sum_t x^t & \sum_t (x^t)^2 & \sum_t (x^t)^3 & \dots & \sum_t (x^t)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_t (x^t)^k & \sum_t (x^t)^{k+1} & \sum_t (x^t)^{k+2} & \dots & \sum_t (x^t)^{2k} \end{bmatrix}$$



معیارهای خطا

$$E_{SSE}(\theta|\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N [r^t - g(x^t|\theta)]^2$$

• مجموع مربعات خطا

sum of squared error(SSE)

$$E_{RSE}(\theta|\mathcal{X}) = \frac{\sum_{t=1}^N [r^t - g(x^t|\theta)]^2}{\sum_{t=1}^N [r^t - \bar{r}]^2}$$

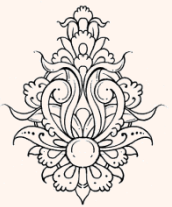
• خطای نسبی

relative square error(RSE)

the coefficient of determination

$$R^2 = 1 - E_{RSE}$$

در صورتی که «ضریب تعیین» نزدیک به ۱ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که مدل به دست آمده مفید است.



Bias and Variance

noise

squared error

Expected square error at x

$$E[(r - g(x))^2 | x] = E[(r - E[r | x])^2 | x] + (E[r | x] - g(x))^2$$

به مدل بستگی ندارد، واریانس نویز است؛ در واقع بخشی از خطاست که قابل حذف نیست

میزان خطا؛ وابسته به داده‌های آموزشی و مدل است

$$E_x[(E[r | x] - g(x))^2 | x] = (E[r | x] - E_x[g(x)])^2 + E_x[(g(x) - E_x[g(x)])^2]$$

bias

variance

معیاری است که میزان خطا را صرفنظر از نمونه‌های آموزشی نشان می‌دهد

با تغییرات داده‌های آموزشی، مقدار $g(x)$ به چه میزان تغییر می‌کند.

- M samples $X_i = \{x_i^t, r_i^t\}, i=1, \dots, M$ are used to fit $g_i(x), i=1, \dots, M$

$$\text{Bias}^2(g) = \frac{1}{N} \sum_t [\bar{g}(x^t) - f(x^t)]^2$$

$$\text{Variance}(g) = \frac{1}{NM} \sum_t \sum_i [g_i(x^t) - \bar{g}(x^t)]^2$$

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{M} \sum_i g_i(x)$$

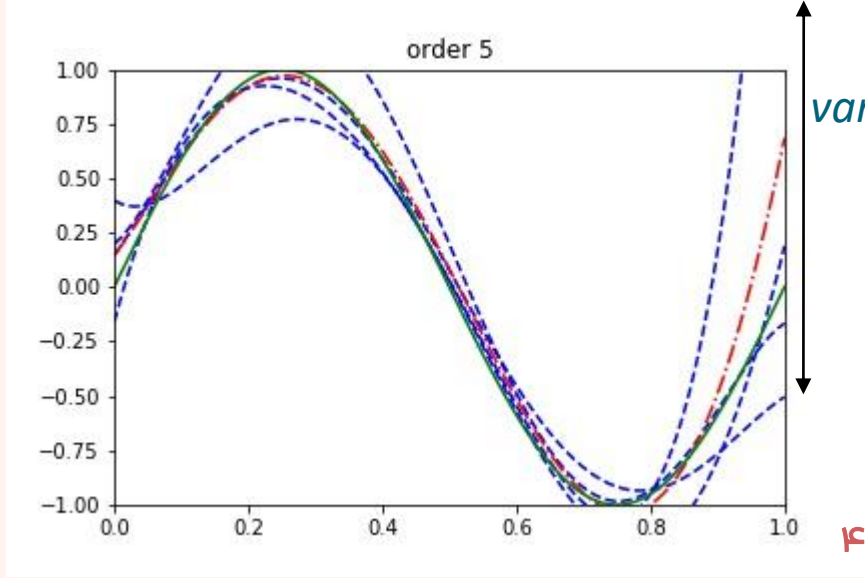
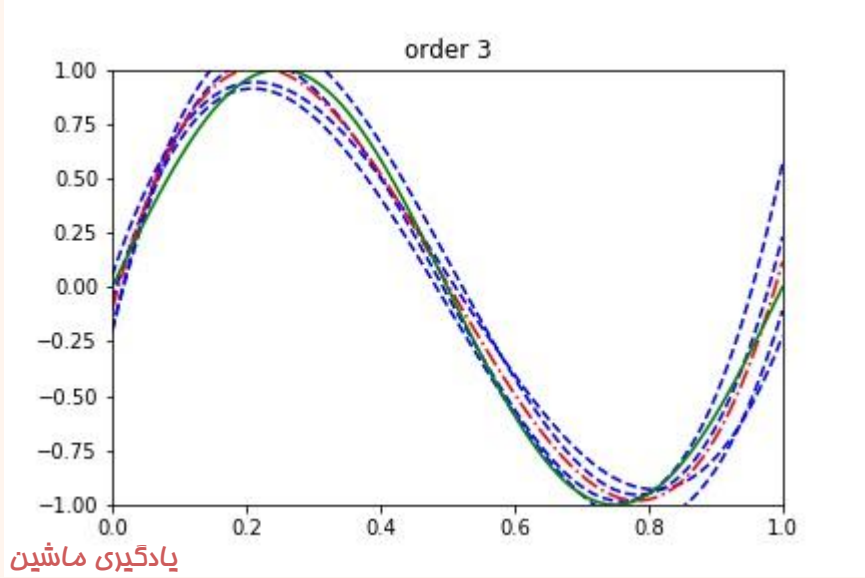
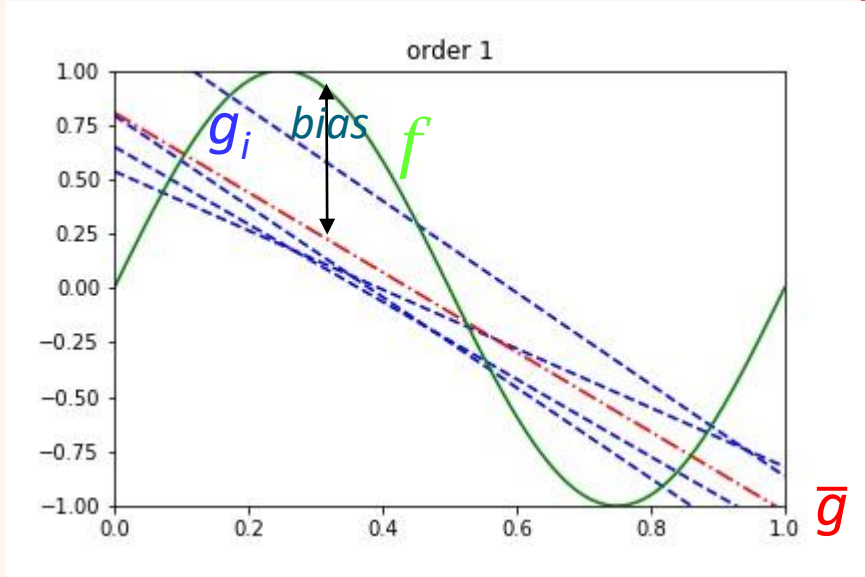
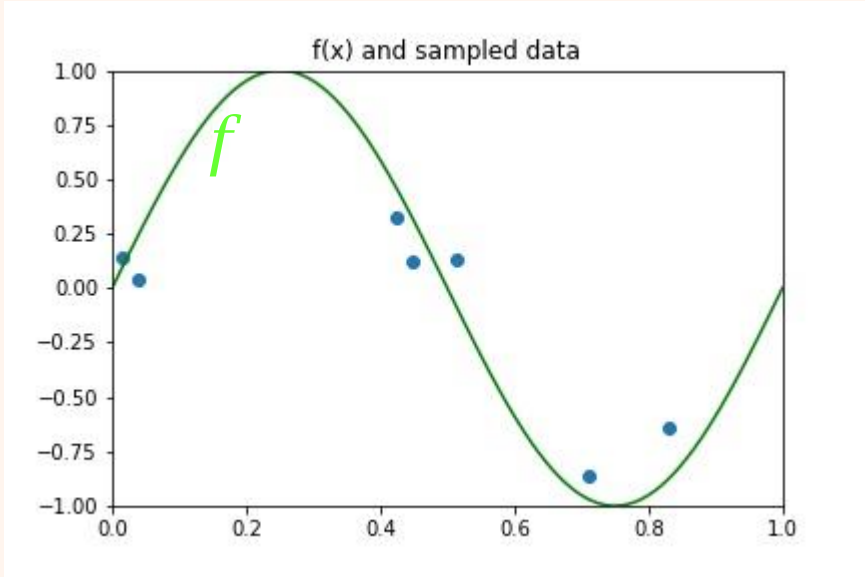
$$g_i(x) = 2$$

واریانس صفر است، اما بایاس بالایی دارد

$$g_i(x) = \sum_t r_i^t / N$$

بایاس کاهش می‌یابد، اما واریانس افزایش می‌یابد

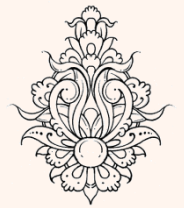
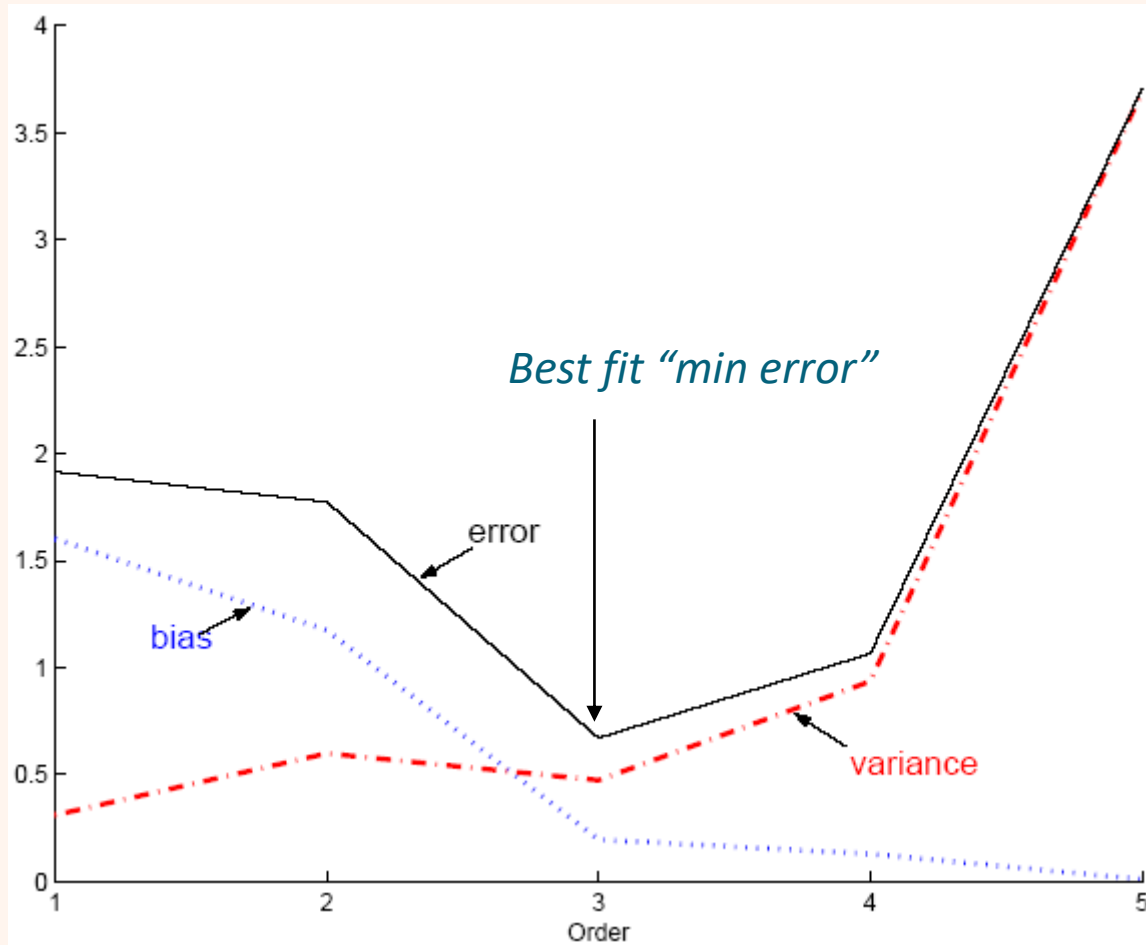




variance

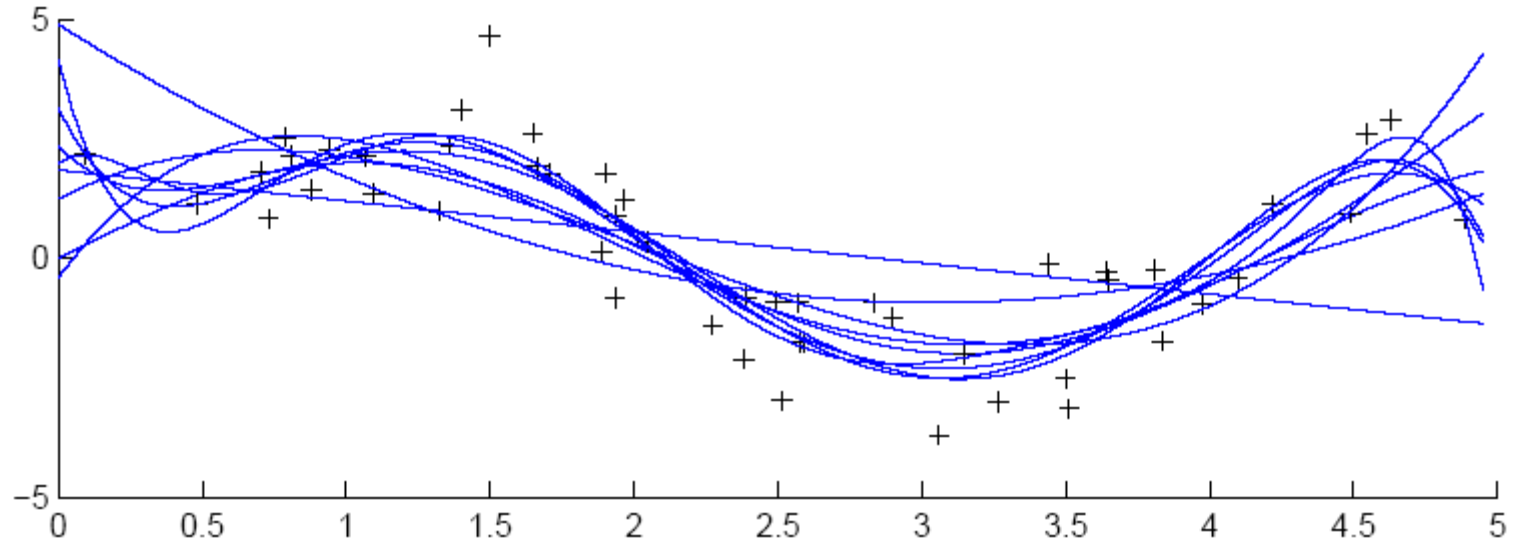


انتخاب مدل

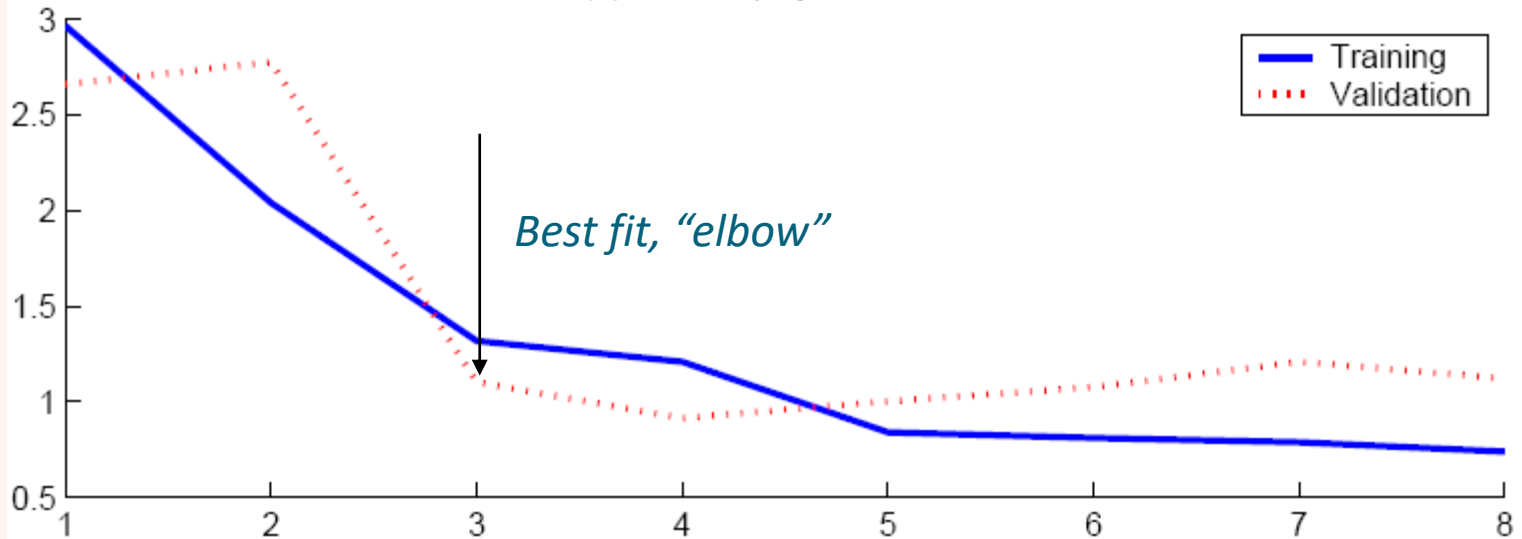


Cross validation

(a) Data and fitted polynomials



(b) Error vs polynomial order



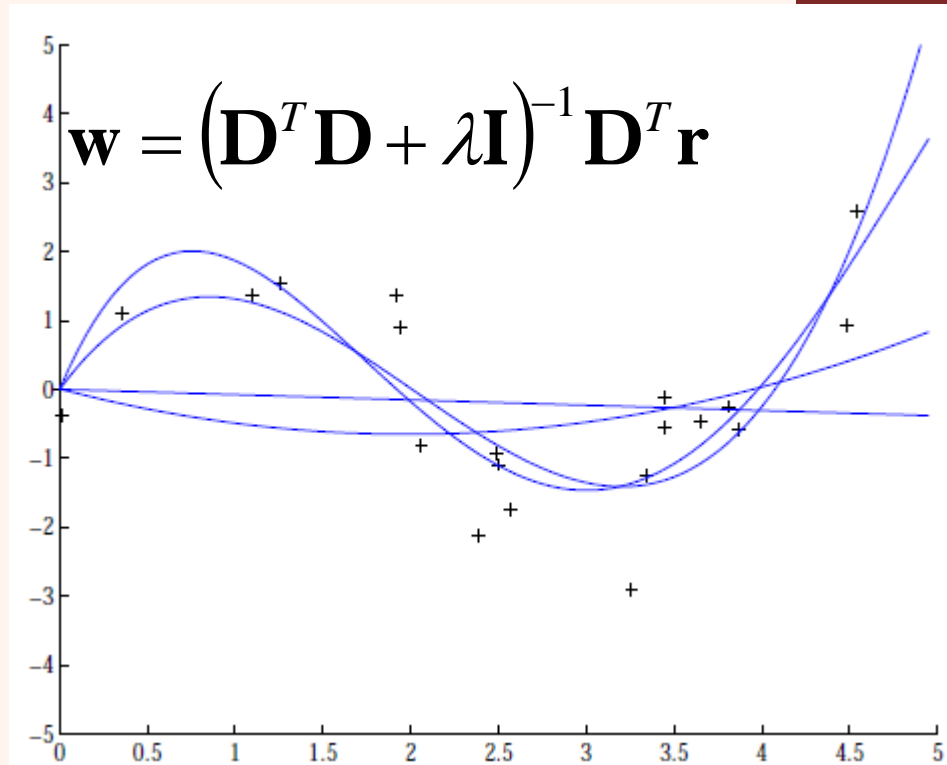
تراشکا
سپهبد
بهشتو

Regularization

روشنی است که برای کاهش بیش‌برازش و در نتیجه کاهش خطا

$E' = \text{error on data} + \lambda \text{ model complexity}$

Penalize complex models



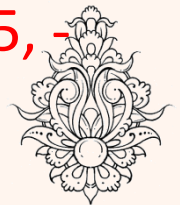
Coefficients increase in magnitude as order increases:

1: [-0.0769, 0.0016]

2: [0.1682, -0.6657, 0.0080]

3: [0.4238, -2.5778, 3.4675, -0.0002]

4: [-0.1093, 1.4356, -5.5007, 6.0454, -0.0019]



$$\text{regularization : } E'(\mathbf{w}|\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=1}^N \left[r^t - g(x^t|\mathbf{w}) \right]^2 + \lambda \sum_i w_i^2 \right\}$$

Regularization

9th Order Polynomial

